Recitation

Hongxin Yang

CCNU

2026 年 4 月 8 日

目录

1. Exercise 3.3
2. Exercise 3.2

Problem

设$f(t,x)$关于t,x连续可微，$x=\varphi(t,t_0,x_0)$是$\frac{dx}{dt}=f(t,x)$满足初值条件$x(t_0)=x_0$的解

证明：$\frac{\partial\varphi}{\partial t_0}(t,t_0,x_0)+\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}(t,t_0,x_0)\cdot f(t_0,x_0)=0$

证明.

事实上我们有等式：$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=f(t,\varphi)$

对t_0求导得：$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_0}\right)=f_x(t,\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial t_0}$ 对x_0求导得：$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right)=f_x(t,\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}$

设$w(t)=\frac{\partial\varphi}{\partial t_0}(t,t_0,x_0)+\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}(t,t_0,x_0)\cdot f(t_0,x_0)$

现在t求导得：$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_0}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right)f(t_0,x_0)$

即$\frac{dw}{dt}=f_x(t,\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial t_0}+f_x(t,\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}f(t_0,x_0)=f_x(t,\varphi)w(t)$

□

证明.

说明$w(t)$满足$\dfrac{dw}{dt}=f_x\cdot w$

现在计算$w(t)$在$t=t_0$时刻初值，我们需要用到原方程的初值来进行计算

对于$\varphi(t_0,t_0,x_0)=x_0$

对x_0求导：$\left.\dfrac{\partial\varphi(t,t_0,x_0)}{\partial x_0}\right|_{t=t_0}=1$

对t_0求导：$\frac{\partial}{\partial t_0}\left[\varphi(t_0,t_0,x_0)\right]=\left.\dfrac{\partial\varphi(t,t_0,x_0)}{\partial t}\right|_{t=t_0}\cdot 1+\left.\dfrac{\partial\varphi(t,t_0,x_0)}{\partial t_0}\right|_{t=t_0}\cdot 1=0$

而我们知道：$\left.\dfrac{\partial\varphi(t,t_0,x_0)}{\partial t}\right|_{t=t_0}=f(t_0,x_0)$

因此有：$f(t_0,x_0)+\left.\dfrac{\partial\varphi(t,t_0,x_0)}{\partial t_0}\right|_{t=t_0}=0$

故$w(t_0)=\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_0}\right|_{t=t_0}+\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right|_{t=t_0}f(t_0,x_0)=-f(t_0,x_0)+1\cdot f(t_0,x_0)=0$

根据解的存在唯一性定理我们自然知道该初值问题的解只有一个，即零解

故$w(t)=0$.证毕！ □

(第一比较定理)

设函数 $f(x,y)$ 和 $F(x,y)$ 均在区域 G 内连续，且

$$f(x,y) < F(x,y), \quad (x,y) \in G,$$

又设函数 $y=\phi(x)$ 和 $y=\Phi(x)$ 在区间 (a,b) 上分别是初值问题

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

和

$$y' = F(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

的解，其中 $(x_0,y_0) \in G$ 则有：

$$\begin{cases} \phi(x) < \Phi(x), & x_0 < x < b, \\ \phi(x) > \Phi(x), & a < x < x_0. \end{cases}$$

定理证明 (1/2)

证明 令

$$\psi(x) = \Phi(x) - \phi(x),$$

则 $\psi(x)$ 在 (a,b) 上连续可微，且

$$\psi(x_0) = 0, \quad \psi'(x_0) = F(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) > 0.$$

因此，存在 $\delta > 0$，使得

$$\begin{cases} \psi(x) > 0, & x \in (x_0, x_0 + \delta], \\ \psi(x) < 0, & x \in [x_0 - \delta, x_0). \end{cases} \tag{1}$$

定理证明 (2/2)

现在来证明第一个不等式成立，第二个不等式的证明类似。若不然，则存在 $x_1 > x_0$，使得 $\Phi(x_1) \leqslant \phi(x_1)$，即 $\psi(x_1) \leqslant 0$。
令

$$\alpha = \min\{x \in (x_0 + \delta, b) \mid \psi(x) = 0\},$$

则由 (1) 式的第一个式子和 α 的定义可知

$$\psi(\alpha) = 0, \quad \psi(x) > 0,\ x \in (x_0, \alpha).$$

由此可得到 $\psi'(\alpha) \leqslant 0$。但是，由 (3.8) 式可知

$$\psi'(\alpha) = F(\alpha, \Phi(\alpha)) - f(\alpha, \phi(\alpha)) > 0,$$

矛盾。 $\square$

Problem

设函数f对任意$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$都满足$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant k|x_1 - x_2|, \quad 0 < k < 1.$
则f存在唯一的不动点,即存在唯一$\xi \in \mathbb{R}$使得$f(\xi) = \xi$.

令$G(x) = x - f(x)$.任取$x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ (x_1 < x_2)$.则
$G(x_2) - G(x_1) = \geqslant (1-k)(x_2 - x_1) > 0$.因此$G(x)$在$\mathbb{R}$严格单调递增.
对于$\forall E > 0$,由于
$G(x) - G(0) = x - f(x) + f(0)$
而$|f(x) - f(0)| \leqslant k|x| \Longrightarrow -k|x| \leqslant f(x) - f(0) \leqslant k|x|$
$\Longrightarrow x + k|x| - f(0) \geqslant G(x) \geqslant x - k|x| - f(0)$
因此$\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = +\infty$同理可知$\lim\limits_{x \to -\infty} G(x) = -\infty$
由条件可知f在$\mathbb{R}$上连续,因此G在$\mathbb{R}$也是连续函数.因此一定存在$a, b \in \mathbb{R}$使得$G(a) < 0, G(b) > 0$.
由零点定理可知存在$\xi \in \mathbb{R}$使得$G(\xi) = 0$,即$f(\xi) = \xi$.由于$G(x)$单调递增
故ξ是$G(x)$的唯一零点.于是可知存在唯一$\xi \in \mathbb{R}$使得$f(\xi) = \xi$.

归纳地构造数列 $\{x_n\}$：任取$x_1 \in \mathbb{R}$, 令$x_{n+1} = f(x_n)\ (n \in \mathbb{N}^*)$，我们下面来证 $\{x_n\}$ 是$\mathbb{R}$中的基本列
因为

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leqslant k|x_n - x_{n-1}| = k|f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| \leqslant k^2|x_{n-1}, x_{n-2}| \leqslant k^{n-1}|x_2 - x_1|$$

于是对任意的$p \in \mathbb{N}^*$, 有

$$|x_{n+p} - x_n| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} |x_{i+1} - x_i| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} k^{i-1}|x_2 - x_1| \leqslant \frac{k^{n-1}}{1-k}|x_2 - x_1| \to 0, \quad n \to \infty$$

这说明 $\{x_n\}$ 是$\mathbb{R}$中的基本列, 故存在$\xi \in \mathbb{R}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$, 于是有

$$f(\xi) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \xi$$

这就说明了f存在不动点.

且此时

$|\xi - \zeta| = |f(\xi) - f(\zeta)| \leqslant k|\xi - \zeta|$可知$|\xi - \zeta| = 0$, 即$\xi = \zeta$, 故$f$的不动点唯一

广义 Gronwall 不等式

定理内容：
假设函数 $f(x), g(x), h(x) \in C^0[a,b]$，$g(x) \geqslant 0$，如果

$$f(x) \leqslant h(x) + \int_a^x g(s)f(s)\mathrm{d}s, \tag{1}$$

则有：

$$f(x) \leqslant h(x) + \mathrm{e}^{\int_a^x g(s)\mathrm{d}s}\int_a^x h(s)g(s)\mathrm{e}^{-\int_a^s g(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s. \tag{2}$$

特别地，如果 $h(x)$ 单调递增，可以进一步得到：

$$f(x) \leqslant h(x)\mathrm{e}^{\int_a^x g(s)\mathrm{d}s}. \tag{3}$$

证明过程 (1/3)

证明：

令辅助函数 $u(x)=\int_a^x g(s)f(s)\mathrm{d}s$。

显然 $u(a)=0$。对 $u(x)$ 求导，得到：

$$u'(x)=g(x)f(x)$$

由已知条件 (1) 式 $f(x)\leqslant h(x)+u(x)$，且因为 $g(x)\geqslant 0$，不等式两边同乘 $g(x)$ 方向不变：

$$g(x)f(x)\leqslant g(x)h(x)+g(x)u(x)$$

将其代入导数表达式，得到关于 $u(x)$ 的一阶线性微分不等式：

$$u'(x)-g(x)u(x)\leqslant g(x)h(x)$$

证明过程 (2/3)

不等式两端同乘积分因子 $\mathrm{e}^{-\int_a^x g(t)\mathrm{d}t}$，得：

$$u'(x)\mathrm{e}^{-\int_a^x g(t)\mathrm{d}t} - g(x)u(x)\mathrm{e}^{-\int_a^x g(t)\mathrm{d}t} \leqslant g(x)h(x)\mathrm{e}^{-\int_a^x g(t)\mathrm{d}t}$$

即：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(u(x)\mathrm{e}^{-\int_a^x g(t)\mathrm{d}t}\right) \leqslant g(x)h(x)\mathrm{e}^{-\int_a^x g(t)\mathrm{d}t}$$

对上式从 a 到 x 积分，并利用 $u(a)=0$：

$$u(x)\mathrm{e}^{-\int_a^x g(t)\mathrm{d}t} - 0 \leqslant \int_a^x g(s)h(s)\mathrm{e}^{-\int_a^s g(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s$$

两边同乘 $\mathrm{e}^{\int_a^x g(t)\mathrm{d}t}$ 得 $u(x)$ 的估计：

$$u(x) \leqslant \mathrm{e}^{\int_a^x g(t)\mathrm{d}t}\int_a^x g(s)h(s)\mathrm{e}^{-\int_a^s g(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s$$

代入 $f(x) \leqslant h(x) + u(x)$，(2) 式得证。

证明过程 (3/3)

特别情况证明：

若 $h(x)$ 单调递增，对于积分变量 $s \in [a, x]$，有 $h(s) \leqslant h(x)$。将此放缩应用到已证的 (2) 式中的积分项：

$$\begin{aligned}\int_a^x h(s)g(s)\mathrm{e}^{-\int_a^s g(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s &\leqslant h(x)\int_a^x g(s)\mathrm{e}^{-\int_a^s g(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s\\ &= h(x)\int_a^x -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\mathrm{e}^{-\int_a^s g(t)\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}s\\ &= h(x)\left[-\mathrm{e}^{-\int_a^s g(t)\mathrm{d}t}\right]_a^x\\ &= h(x)\left(1-\mathrm{e}^{-\int_a^x g(s)\mathrm{d}s}\right)\end{aligned}$$

将其代回 (2) 式：

$$\begin{aligned}f(x) &\leqslant h(x) + \mathrm{e}^{\int_a^x g(s)\mathrm{d}s}\cdot h(x)\left(1-\mathrm{e}^{-\int_a^x g(s)\mathrm{d}s}\right)\\ &= h(x) + h(x)\mathrm{e}^{\int_a^x g(s)\mathrm{d}s} - h(x) = h(x)\mathrm{e}^{\int_a^x g(s)\mathrm{d}s}\end{aligned}$$

(3) 式得证。